1 Examen de Andalucía

1.1 Planteamiento

Examen práctico. Andalucía 2-VII-1998

1. Discutir y resolver el sistema
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Representar las gráficas de
$$y(x^2+3) = 1, \text{ y de } 8xy - x + 1 = 0$$
y determinar el área limitada por las curvas y los semiejes positivos.

3. Calcular $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con una precisión de una milésima.

4. Hallar 2 números tales que su m.c.d. sea 120 y la diferencia de sus cuadrados sea 345600

5. Sea $z = e^{\frac{2\pi i}{7}}$, una raíz séptima de la unidad. Calcular
$$1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + z^{36}$$

6. Consideramos dos calles, que se cruzan perpendicularmente y ambas de 10 m. de anchura. Por cada una de ellas circula una bicicleta de 2 m. de longitud, y cuya anchura suponemos nula. Las bicicletas se mueven paralelamente a las aceras con la misma velocidad, aunque la distancia de cada una a su acera no ha de ser igual a la que lleva la otra. Calcular la probabilidad de que choquen

7. Hallar el círculo osculador a la curva $y = \cos(x-1)$ donde $x \in (-1, 1)$, en el punto $x = 0$.

1.2 Resolución

1.- Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & (1) \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & a-1 \\ 1-a^2 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1+a & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2(2+a)$$

Por lo tanto, si $\det(A) \neq 1, -2$, tenemos que $\det(A) \neq 0$, y la matriz A tendrá rango 3. Como el rango de la ampliada $rg(A|b) \leqslant 3$, tenemos que $rg(A|b) = rg(A) =$n^o de incógnitas, y por lo tanto es un sistema de Cramer que podemos resolver de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} (1) & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)} = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)} = \frac{(a-1)^2}{(1-a)^2(2+a)} = \frac{1}{2+a} \\
y &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & (1) & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)} = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)} = \frac{(a-1)^2}{(1-a)^2(2+a)} = \frac{1}{2+a} \\
z &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & (1) \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)} = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)} = \frac{(a-1)^2}{(1-a)^2(2+a)} = \frac{1}{2+a}
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $a = 1$. Entonces el rango de A es uno, $rg(A) = 1$. Pero también se da que $rg(A|b) = 1$, ya que todas las filas son identicas al vector $(1,1,1,1)$. Por lo tanto, al coincidir los rangos, el sistema es compatible. Al ser los rangos menores que el número de incógnitas, es un sistema compatible indeterminado, con $3-1=2$ grados de libertad.

Escogiendo una ecuación cualquiera (todas son iguales), $x+y+z=1 \Rightarrow x = 1-y-z$. Tomando como parámetros $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda = y, \mu = z$, tenemos que la solución general del sistema en este caso la solución es del tipo $(1-\lambda-\mu, \lambda, \mu)$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Supongamos por último que $a = -2$. Entonces $rg(A) = 2$, ya que existe un menor no-nulo de orden dos $\det(C_1, C_2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Pero entonces $rg(A|b) = 3 \neq rg(A) = 2$, luego el sistema será incompatible. En efecto $rg(A|b) = 3$ porque

$$\det(C_1, C_2, b) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & (1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

2.- Podemos -por suerte- despejar y en ambas expresiones, con lo cual obtendremos y en función de x en ambos casos. En efecto

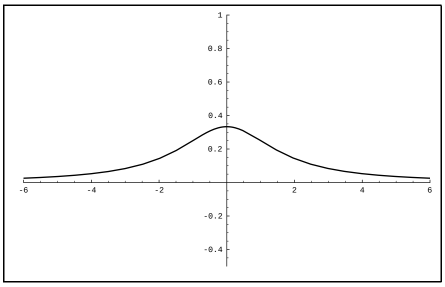
$$\begin{aligned}
y\left(x^2+3\right) &= 1 \Rightarrow y = f(x) := \frac{1}{x^2+3}; \\
8xy - x + 1 &= 0 \Rightarrow 8xy = 1 - x \Rightarrow y = g(x) := \frac{1-x}{8x}
\end{aligned}$$

Representamos $f(x)$. No existen cortes con el eje OX, ya que el denominador no se anula nunca. El corte con el eje OY es $(0, f(0)) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2x}{(x^2+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\
f''(x) &= \frac{-2\left(x^2+3\right)^2 + 2x\left(x^2+3\right)2x \cdot 2}{(x^2+3)^4} = \frac{-2\left(x^2+3\right) + 8x^2}{(x^2+3)^3} \\
&= \frac{2\left(3x^2-3\right)}{(x^2+3)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1
\end{aligned}$$

Como $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, entonces ahí la función presenta un único extremo relativo. Al ser $f''(0) = \frac{-6}{27} < 0$, se trata de un máximo local.

Como $f'(0)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$, entonces la función presenta puntos de inflexión en $x=1$ y en $x=-1$. Como $f''(x)>0 \Leftrightarrow 3\left(x^2-1\right)>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1$, entonces la función es cóncava en $|x|<1$, es decir f es cóncava en $x\in(-1,1)$, y es convexa en $x\in\mathbb{R}-[-1,1]$. Por lo tanto, su gráfica queda como sigue:



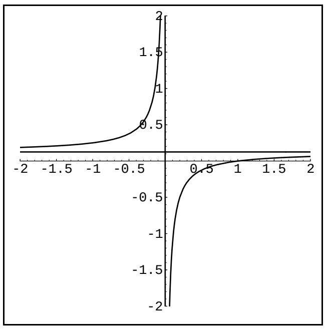
Representamos ahora $g(x)=\frac{x-1}{8x}=\frac{1}{8}-\frac{1}{8x}$. Sabemos que $Dom(g)=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$, ya que $\nexists g(0) \Rightarrow$ Calculamos los límites laterales $\lim_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$. Por lo tanto, $g(x)$ presenta una asíntota vertical en $x=0$.

$g(x)=0 \Longleftrightarrow x-1=0 \Longleftrightarrow x=1$

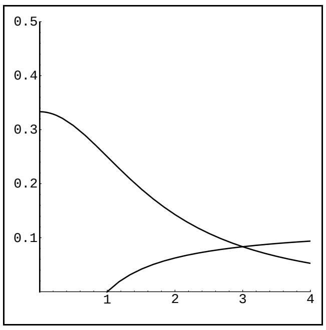
$g'(x)=\frac{1}{8x^2}\neq 0\,\forall x\in\mathbb{R}^* \Rightarrow$ La función no presenta puntos críticos.

$g''(x)=\frac{-2}{8x^3}\neq 0\,\forall x\in\mathbb{R}^* \Rightarrow$ La función no presenta puntos de inflexión.

Además, como $g'(x)>0\,\forall x$, la función es creciente en todo su dominio, y como $g''(x)>0\,\forall x<0$, entonces la función es convexa en $\mathbb{R}^-$, mientras que al ser $g''(x)<0\,\forall x>0$, entonces la función es cóncava en $\mathbb{R}^+$. Por tanto su gráfica queda como sigue:



(b) Para determinar ahora el área comprendida entre las dos curvas y los semiejes ordenados positivo hallamos la intersección de las curvas.



$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \to \frac{1}{x^2+3}=\frac{x-1}{8x} \to 8x=x^3+3x-x^2-3 \\ &\Rightarrow \psi(x)=x^3-x^2-5x-3=0 \end{aligned}$$

Podemos comprobar facilmente que $x=-1$ es raíz (por Ruffini, p.e.), y entonces podemos expresar ψ como $\psi(x)=(x+1)\left(x^2-2x-3\right)=(x+1)(x+1)(x-3)=(x+1)^2(x-3)$.

Como la única raíz positiva es $x=3$, ésta será la solución buscada de $f(x)=g(x)$. Por lo tanto, el área pedida es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 (f(x)-g(x))\,dx=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}+\int_1^3\left(\frac{1}{x^2+3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}\right)dx= \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}-\frac{3-1}{8}+\left[\frac{1}{8}\ln x\right]_1^3=\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{3}+\frac{\ln 3}{8}+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

ya que $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{3}$, haciendo el cambio de variable standard, ed $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$, tenemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}[\arctan t]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{3}$$

3.- Desarrollamos e^{-x^2} mediante la fórmula de Taylor. Como tenemos que el radio de convergencia de la serie que define a $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ es infinito, $\rho = +\infty$, podemos sustituir término a término, obteniendo una expresión que escribimos utilizando el término de Lagrange para el resto, ed.

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{(-1)x^2}{1!} + \frac{(-1)^2 x^4}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + R_n(x,\xi), \xi \in (0,x)$$

donde $R_n(x,\xi) = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(n+1)!}e^{-\xi^2}$. Por lo tanto, tendremos que $I = \int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 P_n(x)\,dx + \int_0^1 R_n(x)\,dx$. Como queremos aproximar I con precisión de una milésima, hemos de conseguir que $\left|\int_0^1 R_n(x)\,dx\right| \leqslant 10^{-3}$. Pero

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 R_n(x)\,dx\right| &\leqslant \int_0^1 |R_n(x)|\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(n+1)!}x^{2n+2}dx = \left[\frac{1}{(n+1)!}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}\end{aligned}$$

ya que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}x^{2n+2}, \text{ ya que } f(x) = e^{-x^2} \text{ es decreciente en } (0,x) \subset [0,1], y \max e^{-\xi^2} = 1, \text{ si } \xi \in [0,1]$$

Entonces, queremos conseguir que $\left|\int_0^1 R_n(x)\,dx\right| \leqslant 10^{-3}$, o equivalentemente que $\frac{1}{(2n+3)(n+1)!} \leqslant \frac{1}{1000} \Longleftrightarrow 1000 \leqslant (2n+3)(n+1)!$. Vamos probando con sucesivos números, hasta que comprobamos que $n \geq 5$, nos basta, ya que $13 \cdot 720 = 9360 \geqslant 1000$ y .

Por lo tanto, podemos aproximar la integral como

$$\begin{aligned} I &\approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!}\right)dx = \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \frac{x^{11}}{1320}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} = \\ &= \frac{5651}{7560} - \frac{1}{1320} = 0'74673 \end{aligned}$$

4.- $120 = mcm(A,B) \rightarrow A = 120 \cdot a, B = 120 \cdot b$. Entonces, como queremos hallar estos A,B de modo que $A^2 - B^2 = 345600$. Basta entonces hallar a,b, ya que

$$A^2 - B^2 = 120^2 \cdot (a^2 - b^2) = 345600 = 120^2 \cdot 24$$

luego el problema lo podemos simplificar a encontrar tales a,b de forma que $a^2 - b^2 = 24 = 3 \cdot 2^3$. Como $a,b \in \mathbb{Z}$, podemos reescribir como $(a+b)(a-b) = 2^3 \cdot 3$, y como cada paréntesis también será entero, se trata de encontrar la posibles descomposiciones factoriales del número 24. Como estamos tratando con números al cuadrado, a^2 y b^2, entonces la soluciones son válidas con cualquier signo. Las posibles descomposiciones de 24 son $3 \cdot 8, 6 \cdot 4, 12 \cdot 2, 24 \cdot 1$. Resolviendo los sistemas obtenidos

$$\begin{aligned} a+b &= 3 \rightarrow 2a - 8 = 3 \rightarrow 2a = 11 \text{ contradicción porque } a \in \mathbb{N} \\ a-b &= 8 \rightarrow b = a - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 6 \rightarrow 2a = 6 + 4 \rightarrow a = 5, b = 1 \\ a-b &= 4 \rightarrow b = a - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 12 \rightarrow 2a = 12 + 2 \rightarrow a = 7, b = 5 \\ a-b &= 2 \rightarrow b = a - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 24 \rightarrow 2a-1=24 \rightarrow 2a=25 \text{ contradicción porque } a\in\mathbb{N} \\ a-b &= 1 \rightarrow b=a-1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(a,b)\in\{(\alpha\cdot 5,\beta\cdot 1)\,|\alpha,\beta\in\{+1,-1\}\}\cup\{(\alpha\cdot 7,\beta\cdot 5)\,|\alpha,\beta\in\{+1,-1\}\}$

5.- Observamos en primer lugar que $\mathrm{Re}(S)=0$, donde $S=1+z+z^4+...+z^{36}$, y $z=e^{\frac{i\cdot 2\pi}{7}}$... por inspiración divina, o por desesperación, no toi seguro...

En primer lugar, vemos que $S=1+z+z^4+\ldots+z^{36}=1+2z+2z^2+2z^4$, aplicando que $z^7=1$, luego

$$\begin{aligned} \frac{S+\overline{S}}{2} &= \frac{1}{2}\left(1+2z+2z^2+2z^4+1+2z^6+2z^5+2z^3\right)= \\ &= 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0 \end{aligned}$$

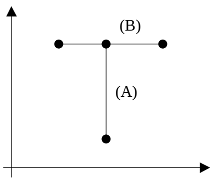
Entonces, ¡oh, maravillosa idea!, $S^2\in\mathbb{R}^-$, al ser $S\in\mathbb{C}$ imaginario puro. Bueno, pues

$$\begin{aligned} S^2 &= \left(1+2z+2z^2+2z^4\right)^2= \\ &= 1+4z^2+4z^4+4z^8+4z+4z^2+4z^4+8z^5+8z^3+8z^6=(\text{y como } z^8=z,\ldots) \\ &= 1+8z^2+8z+8z^4+8z^5+8z^3+8z^6=-7+8\left(1+z+...+z^6\right)= \\ &= -7+0=-7\longrightarrow S=\sqrt{-7}=i\sqrt{7} \end{aligned}$$

6.- Sea X=”coordenada x de la bicicleta A”, y sea Y=”coordenada y de la bicicleta A”

Como ambas bicicletas se mueven a la misma velocidad, si A entra por $x=x_0$ y B entra por $y=x_0\Rightarrow$ las bicicletas chocarán. Pueden darse dos posibilidades, que A choque con B, o bien que B choque con A.

Podemos suponer el origen de coordenadas en una de las esquinas de la intersección.



En el primer caso, $A_1\in[B_1,B_2]$, el segmento determinado por B_1,B_2. Entonces si llamamos t al tiempo transcurrido, $A_1=(x_0,tv)\Rightarrow B_1=(tv,y_0)\,,B_2=(tv-2,y_0)$. Por lo tanto

$$y_0-2=tv-2<x_0<tv=y_0 \text{ es decir que } y_0-2<x_0<y_0$$

En el segundo caso $B_1\in[A_1,A_2]$, es decir $(tv,y_0)\in[(x_0,tv)\,,(x_0,tv-2)]$, y por lo tanto tendremos que

$$x_0-2<y_0<tv=x_0$$

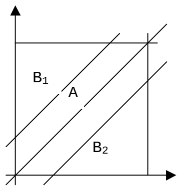
Luego las condiciones que se han de cumplir para que choquen ha de ser que

$$\begin{matrix} y-2<x<y \\ x-2<y<x \end{matrix} \quad \text{que podemos desglosar en 4} \quad \begin{matrix} y-2<x \\ x-2<y \\ x<y \\ y<x \end{matrix}$$

Como las bicicletas circulan a una distancia de la baldosa entre 0 y 10m, podemos suponer que siguen distribuciones uniformes, ed $X\equiv U(0,10)$, y que $Y\equiv U(0,10)$. También podemos suponer que son independientes. Entonces, $f_X(x)=\frac{1}{10}\chi_{(0,10)}(x)$, con $\chi(x)$ la función indicador del intervalo $(0,10)$, ed $\chi(x)=1$ si $x\in(0,10)$, $=0$ en caso contrario. Análogamente $f_X(y)=\frac{1}{10}\chi_{(0,10)}(y)$ es la función de densidad de Y. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(\text{”choquen”}) &= P((X,Y)\in A)=\iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy= \\ &= \frac{1}{100}\iint_A dxdy=\frac{1}{100}\text{Area}(A) \end{aligned}$$

es decir, que podemos interpretar las probabilidades como áreas, al tratarse de distribuciones uniformes. Luego



$$\begin{aligned} p &= \frac{CF}{CP} = \frac{\text{Area}(A)}{\text{Area total}} = \frac{100 - (\text{Area}(B_1) + \text{Area}(B_2))}{100} = \\ &= 1 - \frac{\frac{8\cdot 8}{2} + \frac{8\cdot 8}{2}}{100} = 1 - \frac{64}{100} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

7.- Se define el círculo osculador a una curva como el círculo tangente en ese punto a la curva, (e.d. que coinciden las tangentes de la curva y la circunferencia) y que tiene como radio el radio de curvatura de la curva en el punto, $\rho = \frac{1}{k_1}$, donde k_1 es la curvatura de la curva en el punto.

Es decir, que si r es la tangente común, entonces O, centro de la circunferencia está en $s \perp r$, de modo que $|OP| = \rho = \frac{1}{k_1}$.

Si parametrizamos la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ por la longitud de arco, entonces $k_1(s) = \|\gamma''(s)\|$, con s el parámetro arco, es decir $s(t) = L(t) = \int_a^t \|\gamma'(r)\| \, dr$.

Tenemos que $s'(t) = \|\gamma'(t)\| - \int_0^0 \ldots = \|\gamma'(t)\| > 0$ si la curva es regular, con lo cual es un cambio de variables admisible, al ser s una biyección continua - es estrictamente creciente-. Sea $L_0 = long(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(r)\| \, dr$, y sea el cambio de variable $\sigma : [0, L_0] \to [a, b]$, con $t(s) = \sigma(s)$, o lo que es lo mismo, $\sigma = L^{-1}$. Consideramos ahora la curva reparametrizada, e.d. sea $\overline{\gamma} = \gamma \circ \sigma : [0, L_0] \to \mathbb{R}^2$ y calculamos su derivada.

$\overline{\gamma}'(s) = \gamma'(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) = \gamma'(\sigma(s)) \frac{1}{L'(\sigma(s))} = \gamma'(\sigma(s)) \frac{1}{\|\gamma'(\sigma(s))\|}$. Por lo tanto, $\|\overline{\gamma}'(s)\| = 1$, ya que sería $\|\overline{\gamma}'(s)\| = \left\| \gamma'(\sigma(s)) \frac{1}{\|\gamma'(\sigma(s))\|} \right\| = \frac{1}{\|\gamma'(\sigma(s))\|} \|\gamma'(\sigma(s))\|$. Por lo tanto de aquí deducimos que $\overline{\gamma}'(s) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$, o equivalentemente

$$\gamma'(t) = \overline{\gamma}'(s) \, s'(t) \tag{1}$$

$\|\overline{\gamma}'(s)\| = 1 \Rightarrow \|\overline{\gamma}'(s)\|^2 = 1 \Leftrightarrow \langle \gamma', \gamma' \rangle = cte = 1$. Entonces, derivando, tenemos que $\langle \gamma'', \gamma' \rangle + \langle \gamma', \gamma'' \rangle = 2 \langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0 \Rightarrow \langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$

Entonces, derivando en (1) obtenemos

$$\gamma''(t) = \overline{\gamma}''(s) \, (s'(t))^2 + \overline{\gamma}'(s) \, s''(t) \tag{2}$$

Calculamos ahora

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle &= \left\langle \overline{\gamma}'(s) \, s'(t), \overline{\gamma}''(s) \, (s'(t))^2 + \overline{\gamma}'(s) \, s''(t) \right\rangle \\ &= s'(t)^3 \langle \gamma', \gamma'' \rangle + s'(t) s''(t) \langle \gamma', \gamma' \rangle \\ &= 0 + s'(t) s''(t) \cdot 1 \end{aligned}$$

$$s''(t) = \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{s'(t)} = \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|} \tag{3}$$

De la ecuación (2) podemos despejar $\overline{\gamma}''(s)$, y obtenemos, aplicando (1) y (3) que

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}''(s) &= \frac{\gamma''(t)}{s'(t)^2} - \frac{\overline{\gamma}'(s) \, s''(t)}{s'(t)^2} = \\ &= \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} - \frac{\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|}}{\|\gamma'(t)\|^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$k_1 = \|\overline{\gamma}''(s)\| = \left\| \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} - \frac{\gamma'(t) \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^4} \right\|$$

En nuestro caso, $\gamma(t)=(t,\cos(t-1))\Rightarrow\gamma'(t)=(1,-\sin(t-1))\Rightarrow\gamma''(t)=(0,-\cos(t-1))$

$\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle=\sin(t-1)\cos(t-1)$, por lo que evaluando en $t=1$, tendremos que $\gamma(t)=(1,1)\,,\gamma'(t)=(1,0)\,,\gamma''(t)=(0,-1)\,,\langle\gamma',\gamma''\rangle=0$. Luego $k_1(1)=\left\|\frac{1}{1}(0,1)\right\|=1$. Por lo tanto el círculo osculador tiene radio $\rho=\frac{1}{k_1(1)}=1$. Hallamos el centro del círculo osculador. La tangente r a la curva en $P=(1,1)$ es $r(t)=P+\gamma'(1)\cdot t=(1,1)+(t,0)=(1+t,1)$. El centro se halla en $s\perp t$ por P. Entonces $s\equiv x=1$, ya que $r\equiv y=1$, y se cumple que $\|OP\|=1=d(P,O)=d((1,1),(1,\xi))\Rightarrow\xi=0$. Por lo tanto, el centro es el punto $O=(1,0)$, y el círculo osculador será la circunferencia

$$(x-1)^2+y^2=1$$

OTRA FORMA

Se dice que dos curvas f,g tienen en a un contacto de orden n si se cumple que $f(a)=g(a)\,,\ f'(a)=g'(a)\,,\ldots,\ f^{(n)}(a)=g^{(n)}(a)$. Un círculo osculador a una curva en un punto es una circunferencia que tiene un contacto de orden dos con la curva en el punto.

Sea la ecuación de la circunferencia $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Ahora imponemos la condición de que tenga un contacto de orden 2 con la curva. Para ello, podemos considerar que hemos hallado $y=g(x)$, que nos da la expresión de la circunferencia, y hallamos las derivadas -con respecto a x-

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(g(x)-b)^2&=r^2 &(4)\\ 2(x-a)+2(g(x)-b)g'(x)&=0\text{, es decir}\\ (x-a)+(g(x)-b)g'(x)&=0 &(5)\\ 1+(g(x)-b)g''(x)+g'(x)^2&=0 &(6)\end{aligned}$$

Calculamos a y b a partir de (5) y (6)

$$\begin{cases}x-a+g(x)g'(x)-bg'(x)=0\\ 1+g(x)g''(x)-bg''(x)+g'(x)^2=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}a+bg'(x)=x+g(x)g'(x)\\ bg''(x)=1+g(x)g''(x)+g'(x)^2\end{cases}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}b&=g(x)+\frac{1+g'(x)^2}{g''(x)}\\ a&=x+g(x)g'(x)-bg'(x)=x+g(x)g'(x)-g(x)g'(x)-\frac{g'(x)}{g''(x)}\left(1+g'(x)^2\right)\\ &=x-\frac{g'(x)\left(1+g'(x)^2\right)}{g''(x)}\\ r^2&=(x-a)^2+(g(x)-b)^2=\left(\frac{g'(x)\left(1+g'(x)^2\right)}{g''(x)}\right)^2+\left(-\frac{1+g'(x)^2}{g''(x)}\right)^2=\\ &=\left(\frac{1+g'(x)^2}{g''(x)}\right)^2\left(1+g'(x)^2\right)=\frac{\left(1+g'(x)^2\right)^3}{g''(x)^2}\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$r=abs\left(\frac{\left(1+g'(x)^2\right)^{3/2}}{g''(x)}\right)$$

Como ahora queremos que esta circunferencia tenga un contacto de orden 2 con la curva $y=f(x)$ en un punto genérico $(x,f(x))$, por lo que ha de cumplirse que $f(x)=g(x)$, $f'(x)=g'(x)$, $f''(x)=g''(x)$.

Particularizando a nuestro caso, $y=f(x)=\cos(x-1)$, y queremos hallar el círculo osculador en el punto $x=1$. Entonces calculamos $f(1)\,,f'(1)\,,f''(1)$. Tenemos que $f(x)=\cos(x-1)|_{x=1}=1$, $f'(x)=-\sin(x-1)|_{x=1}=0$, $f''(x)=-\cos(x-1)|_{x=1}=-1$. El círculo osculador será $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, con $a=1-\frac{0\cdot(\ldots)}{-1}=1$, $b=1+\frac{1}{-1}=0$, y por último $r^2=\frac{1^3}{(-1)^2}=1$, y por lo tanto el círculo osculador es

$$(x-1)^2+y^2=1$$

2 Examen de Murcia

2.1 Planteamiento

1.- Se lanza un dado hasta que aparecen tres resultados distintos. Hallar el número medio de lanzamientos que es preciso realizar.

2.- Una semicircunferencia de radio r se divide en $n+1$ partes iguales, y se une un punto cualquiera de la división con los extremos, formándose un triángulo rectángulo de área $A(k)$. Se pide calcular el límite, cuando $n \longrightarrow \infty$, de la media aritmética de las áreas de esos triángulos.

3.- Sea f una función continua en $[0,\pi]$, y tal que

$$\int_0^\pi f(t)\mathrm{sent\ dt} = \int_0^\pi \mathrm{f(t)cost\ dt} = 0$$

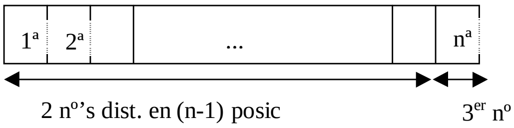
Demostrar que existen al menos dos puntos α,β del intervalo abierto$(0,\pi)$ de modo que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

4.- Demostrar que la ecuación $z^4 - 5(1+i)z - 3 = 0$ no tiene ninguna solución en el cuarto cuadrante del plano complejo.

2.2 Resolución

1.- Hallar el número medio de tiradas en un dado perfecto para que salgan 3 resultados distintos.

Supongamos que el experimento termina en la n^a tirada. La estructura del experimento debe ser



Sean los sucesos $A_n =$"El experimento termina en la tirada n^a", $X =$"N^o de apariciones del 'primer n^o' en $n-1$ tiradas", $Y =$"N^o de apariciones del 'segundo n^o' en $n-1$ tiradas" y $Z =$"en la tirada n^a sale '3er n^o distinto a los dos anteriores"

Entonces,

$$A_n = [(X=1,Y=n-2)\dot{\cup}(X=2,Y=n-3)\dot{\cup}\ldots\dot{\cup}(X=n-2,Y=1)]\cap Z$$

donde $\dot{\cup}$ significa unión disjunta. En X,Y influyen las $n-1$ primeras tiradas, pero en Z sólo influye la n^a, y por lo tanto, como las tiradas de los dados son al azar, podemos suponer que X (ó Y) son independientes de Z. Por lo tanto

$$P(A_n) = \left[\sum_{r=1}^{n-2} P(X=r, Y=n-1-r)\right]\cdot P(Z)$$

$P(Z) = P$("fijados 2 n^o's, salga otro $\neq$") $= \frac{CF}{CP} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Calculemos ahora cada una de las probabilidades $P(X=x,Y=y)=p$, de modo que $x+y=n-1, x,y \geqslant 1$

Tenemos que $p = \frac{CF}{CP} =$; $CP = 6^{n-1}$, y para calcular los casos favorables, como hay que ocupar $n-1$ posiciones con 2 n^{o}s escogidos entre 6, tendremos que $CF = \binom{6}{2}\binom{x+y}{x}$, donde el primer término corresponde a los modos de tomar 2 $\neq$ entre los 6 posibles n^{o}s, mientras que el segundo son los modos de escoger x puestos entre $x+y$, y los otros están ocupados por el 2^o n^o

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \frac{2}{3}\sum_{r=1}^{n-2}\frac{\binom{r+n-1-r}{r}\binom{6}{2}}{6^{n-.1}} = \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{6^{n-1}}\binom{6}{2}\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n-1}{r} = \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{6^{n-1}}\binom{6}{2}\left(\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}-2\right) = \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{6^{n-1}}\cdot 15\cdot\left(2^{n-1}-2\right) = \frac{10}{3^{n-1}} - \frac{20}{6^{n-1}} \end{aligned}$$

Si consideramos ahora la variable aleatoria A, dada por los sucesos A_n e.d. $P(A=n) = P(A_n)$, donde $n \geqslant 3$, entonces el número medio de tiradas para termihar es

$$\begin{aligned} E(A) &= \sum_{n=3}^{+\infty} nP(A=n) = \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{10n}{3^{n-1}} - \frac{20n}{6^{n-1}}\right) = \\ &= 10\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n}{3^{n-1}} - 20\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n}{6^{n-1}} = 10S_1 - 20S_2 \end{aligned}$$

siendo la penúltima igualdad válida al ser S_i finitas, ed convergentes, como vamos a demostrar.

Se trata de calcular sumas de progresiones aritmético-geométricas, y lo hacemos por el método standard, ed multiplicamos por la razón de la serie geométrica y restamos.

$$\begin{aligned} S_{1m} &= \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots + \frac{m}{3^{m-1}} \\ \frac{1}{3}S_{1m} &= \qquad + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{m-1}{3^{m-1}} + \frac{m}{3^m} \end{aligned}$$

y por lo tanto $\frac{2}{3}S_{1m} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{m-1}}\right) - \frac{m}{3^m}$, y como $S_1 = \lim_{m\to+\infty} S_{1m}$, tendremos que

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{3^3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) - \lim_{m\to+\infty}\frac{m}{3^m}\right) = \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3}\frac{3}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Análogamente, calculamos S_2

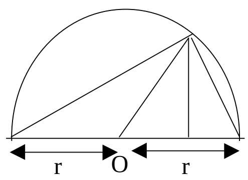
$$\begin{aligned} S_{2m} &= \frac{3}{6^2} + \frac{4}{6^6} + \cdots + \frac{m}{6^{m-1}} \\ \frac{1}{6}S_{2m} &= \quad + \frac{3}{6^6} + \cdots + \frac{m-1}{6^{m-1}} + \frac{m}{6^m} \end{aligned}$$

y por lo tanto $\frac{5}{6}S_{2m} = \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{6^6} + \cdots + \frac{1}{6^{m-1}}\right) - \frac{m}{6^m}$, y como $S_2 = \lim_{m\to+\infty} S_{2m}$, tendremos que

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{12} + \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{6^3}\frac{1}{1-\frac{1}{6}}\right) - \lim_{m\to+\infty}\frac{m}{6^m}\right) = \\ &= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6^3}\frac{6}{5}\right) = \frac{8}{75} \end{aligned}$$

y por tanto $E(A) = 10\frac{7}{2} - 20\frac{8}{75} = 35 - \frac{32}{15} = \frac{493}{15} = 32'8\widehat{6}$

2.- Cada uno de los triángulos pedidos tiene un área, según comprobamos en la figura



que viene dada (al ser el ángulo central $\frac{2\pi k}{2(n+1)}$) por

$$A(k) = \frac{2r\sin\frac{2\pi k}{2(n+1)}}{2} = r\sin\frac{\pi k}{n+1}$$

y por lo tanto la media pedida es $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} A(k) = \lim_{n\to\infty} r\sum\frac{1}{n+1}\sin\frac{\pi k}{n+1} = (*_1)$.

Consideramos en $(0,1)$ las particiones $P_n = \left\{0 = \xi_0 < \xi_1 = \frac{1}{n+2} < \cdots < \xi_m = 1\right\}$, donde $\xi_j - \xi_{j-1} = \frac{1}{n+1}\forall j = 1..n$, y la función $f(x) = \sin\pi x$, que está definida y es continua en $(0,1)$, con lo cual (1) es una suma de Riemann de $f(x)$ en el intervalo $(0,1)$ respecto de particiones P_n cada vez más finas (si $n\to\infty \Rightarrow d(P_n)\to 0$), por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} (*_1) &= r\lim_{n\to\infty}\sum(\xi_j - \xi_{j-1})\sin\pi\frac{k}{n+1} = r\lim_{d(P_n)\to 0} S(f, P_n, (\xi_j)) = \\ &= r\int_0^1 \sin\pi x\,dx = r\left.\frac{-\cos\pi x}{\pi}\right|_0^1 = \frac{2r}{\pi} \end{aligned}$$

3.- La resolución de este problema pide a gritos a la aplicación de los teoremas de Lagrange y Cauchy. Sólo hace falta encontrar los puntos adecuados. Como $\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt = \int_0^\pi f(t)\cos t\,dt = 0$, definimos funciones primitivas $F(x) = \int_0^x f(t)\sin t\,dt$, y $G(x) = \int_0^x f(t)\cos t\,dt$

Primer cero: $F(0) = 0\left(= \int_0^0 \ldots\right)$, $F(\pi) = 0$ por hipótesis, y como f es continua en $(0,\pi)$, entonces F es derivable en $(0,\pi)$, y por lo tanto continua. Entonces estamos en las hipotesis del teorema de Rolle, y $\exists\alpha\in(0,\pi)$ de modo que $F'(\alpha) = 0$. Pero $F'(\alpha) = f(\alpha)\sin\alpha$, y $\sin\alpha \neq 0\forall\alpha\in(0,\pi)$

Segundo cero: Supongamos ahora que $f(\beta)\neq 0\ \forall\beta\neq\alpha$. Entonces aplicamos el teorema del valor medio de Cauchy a F y G en los intervalos $I_1 = (0,\alpha)$ e $I_2 = (\alpha,\pi)$

En I_1 tendremos que $\exists\gamma\in(0,\alpha)$ de modo que $F'(\gamma)(G(\alpha) - G(0)) = G'(\gamma)(F(\alpha) - F(0))$. Pero tenemos que $F(0) = G(0) = 0$, $F'(\gamma) = f(\gamma)\sin\gamma$, $G'(\gamma) = f(\gamma)\cos\gamma$, luego

$$f(\gamma)\sin\gamma G(\alpha) = f(\gamma)\cos\gamma F(\alpha) \tag{7}$$

En I_2 tendremos que $\exists\delta\in(\alpha,\pi)$ de modo que $F'(\delta)(G(\pi) - G(\alpha)) = G'(\delta)(F(\pi) - F(\alpha))$. Pero tenemos que $F(\pi) = G(\pi) = 0$, $F'(\delta) = f(\delta)\sin\delta$, $G'(\delta) = f(\delta)\cos\delta$, luego

$$\begin{aligned} f(\delta)\sin\delta(-G(\alpha)) &= f(\delta)\cos\delta(-F(\alpha)) \\ f(\delta)\sin\delta G(\alpha) &= f(\delta)\cos\delta F(\alpha) \qquad (8) \end{aligned}$$

De las ecuaciones (7) y (8) y del hecho que estamos suponiendo que $f(x) \neq 0\ \forall x \neq \alpha$, se deduce que podemos dividir por $f(\gamma)$ y por $f(\delta)$, con lo que obtendremos

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} F(\alpha) \\ G(\alpha) &= \frac{\cos\delta}{\sin\delta} F(\alpha) \end{aligned}$$

con lo que $\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} F(\alpha) = \frac{\cos\delta}{\sin\delta} F(\alpha)$. Entonces pueden ocurrir dos casos:

1. $F(\alpha) = 0$. Entonces podemos aplicar el método que hemos aplicado para hallar el primer cero al intervalo I_1 (o al intervalo I_2) para hallar otro cero. De hecho en este caso podemos asegurar la existencia de al menos tres ceros.

2. $F(\alpha) \neq 0$. Entoces tenemos que la cotangente coincide en dos puntos distintos de $(0, \pi)$, siento esto imposible al ser ctg x una función biyectiva en este intervalo, es decir,

$$\begin{aligned} F(\alpha) &\neq 0 \Rightarrow ctg\gamma = ctg\delta, \gamma, \delta \in (0,\pi) \Rightarrow \text{contradicción} \\ 0 &< \gamma <\neq \alpha <\neq \delta < \pi \Rightarrow \gamma \neq \delta \end{aligned}$$

4.- Sea $p(z) = z^4 - 5(1+i)z - 3$, y sea $z = a + bi$.
Entonces $p(z)$ puede ser escrito como

$$\begin{aligned} p(z) &= a^4 + 4a^3bi - 6a^2b^2 - 4ab^3i + b^4 - 5a - 5bi - 5ai + 5b - 3 = \\ &= \left(a^4 - 6a^2b^2 + b^4 - 5a + 5b - 3\right) + i\left(4a^3b - 4ab^3 - 5b - 5a\right) \end{aligned}$$

En primer lugar el polinomio no puede tener soluciones reales o imaginarias puras.

- $a = 0$. Entonces $p(z) = \left(b^4 + 5b - 3\right) - 5bi$, y si fuera $p(z) = 0$ entoces $b = 0$. Pero $z = 0 = 0 + 0i$ no es solución
- $b = 0$. Entonces $p(z) = \left(a^4 - 5a - 3\right) - 5ai$, y si fuera $p(z) = 0$ entoces $a = 0$. Pero $z = 0 = 0 + 0i$ no es solución

Veamos ahora que no existe solución en el cuarto cuadrante, donde excluimos los puntos sobre los ejes por lo anterior. La parte imaginaria de p es

$$\begin{aligned} \text{Imp} &= 4a^3b - 4ab^3 - 5b - 5a = \\ &= 4ab\left(a^2 - b^2\right) - 5(a+b) = \\ &= (a+b)(4ab(a-b) - 5) \end{aligned}$$

Si queremos que $z = a + bi$ sea solución tendrá que pasar que $\text{Imp} = 0$, es decir que $(a+b)(4ab(a-b)-5) = 0$
Pero $a > 0, b < 0$, luego $4ab < 0, (a-b) > 0 \Rightarrow (4ab(a-b)-5) < 0$. Por lo tanto ha de darse que $a + b = 0$, es decir $a = -b$.
Esta $z = a + bi$ es una raíz cualquiera; llamando $z_i = a_i + b_i i$ con $i = 1..4$ a las cuatro raices de $p(z)$, tendremos, por la relaciones de Cardano-Vieta, que

$$0 = \sum_{n=1}^{4} z_n = \sum_{n=1}^{4} a_i + i \sum_{n=1}^{4} b_i$$

y como cada $a_i > 0$ estrictamente, entonces $a_i = 0 = b_i$ y ya hemos visto anteriormente que $z = 0$ no era raíz.